数理解析研究所講究録
1497 巻 2006 年 79-87

BC_n 型ジャクソン積分と'基本'対称式

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科　伊藤 雅彦 (Masahiko ITO)
Department of Physics and Mathematics, Aoyama Gakuin University

1 はじめに

ラマヌジャンの ${}_1\psi_1$ 和公式

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\frac{(a)_\nu}{(b)_\nu}z^\nu=\frac{(az)_\infty(q)_\infty(b/a)_\infty(q/az)_\infty}{(z)_\infty(b)_\infty(q/a)_\infty(b/az)_\infty}$$

に代表される様々な q-超幾何級数 (の特殊値) に関する無限積表示公式, 変換公式が知られている. そのような一連の公式の中で特に (very-)well-poised と呼ばれるクラスの q-超幾何級数 ${}_{2r}\psi_{2r}$ に関する公式群 (Bailey の ${}_6\psi_6$ 和公式, Sears, Slater 等の変換公式 [14, Chapter 5]) を多重級数に拡張した概念が BC_n 型ジャクソン積分である. とても複雑に見えるそれら古典的な公式をワイル群対称性の観点から捉え直すことにより, 統一的でシンプルな解釈を与えることができる. また, BC_n 型に限らず, 一般のルート系に付随したジャクソン積分は留数計算による適当な言い換えにより, Macdonald 直交多項式系の直交内積と見なすことができる [20]. (BC_n 型の場合は Macdonald–Koornwinder 直交多項式系のそれが対応する.) ここでは, その一端を, 私が最近発見したある対称式の族との関係とともに紹介したい. 以下 $0<q<1$ とし, $(x)_\infty:=\prod_{i=0}^\infty(1-q^ix)$, $(x)_\nu:=(x)_\infty/(q^\nu x)_\infty$ とする.

2 BC_n 型ジャクソン積分

2.1 ジャクソン積分

$(\mathbb{C}^*)^n$ の任意の点 $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ に対し, 格子点 $\nu=(\nu_1,\nu_2\dots,\nu_n)\in\mathbb{Z}^n$ による q ずらし $z\to q^\nu z$ を次のように決める: $q^\nu z:=(q^{\nu_1}z_1,q^{\nu_2}z_2,\dots,q^{\nu_n}z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$. 点 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ と $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の関数 $f(z)$ に対し, 次の格子上の無限和が収束するとき, それをジャクソン積分と呼ぶ:

$$\int_0^{\xi\infty}f(z)\,\frac{d_qz_1}{z_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_qz_n}{z_n}:=(1-q)^n\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}f(q^\nu\xi).$$

2.2 BC_n 型ジャクソン積分

s を -1 以上の整数とし, ℓ を負でない整数とする. 点 $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^*)^n$ に対し, 次のように関数 $\Phi_{B_n}(z)$, $\Delta_{C_n}(z)$ を定める:

$$\Phi_{B_n}(z)\;:=\;\prod_{m=1}^{2s+2}\prod_{i=1}^{n}z_i^{1/2-\alpha_m}\frac{(qa_m^{-1}z_i)_\infty}{(a_mz_i)_\infty}\times$$

$$\times \prod_{r=1}^{\ell} \prod_{1\le j<k\le n} z_j^{1-2\tau_r} \frac{(qt_r^{-1}z_j/z_k)_\infty}{(t_r z_j/z_k)_\infty} \frac{(qt_r^{-1}z_j z_k)_\infty}{(t_r z_j z_k)_\infty},$$

$$\Delta_{C_n}(z) := \prod_{i=1}^{n} \frac{1-z_i^2}{z_i} \prod_{1\le j<k\le n} \frac{(1-z_j/z_k)(1-z_j z_k)}{z_j}.$$

ただし $q^{\alpha_m}=a_m, q^{\tau_r}=t_r$ とする. $(-1)^n\Delta_{C_n}(z)$ は C_n 型の「ワイルの分母」である.

定義 2.1 点 $\xi\in(\mathbb{C}^*)^n$ と $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の関数 $\varphi(z)$ に対して,

$$\int_0^{\xi\infty} \varphi(z)\Phi_{B_n}(z)\Delta_{C_n}(z)\varpi_q \qquad \left(\varpi_q = \frac{d_q z_1}{z_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d_q z_n}{z_n} \text{と略記}\right)$$

を BC_n 型ジャクソン積分と呼び, 記号 $\langle\varphi,\xi\rangle$ で表す.

定義より $\langle\varphi,\xi\rangle$ は q ずらし $\xi\to q^\nu\xi$ $(\nu\in\mathbb{Z}^n)$ に関して不変であり, パラメータ $a_1,\ldots,a_{2s+2},t_1,\ldots,t_\ell$ と変数 ξ に

$$|a_1a_2\ldots a_{2s+2}(t_1t_2\ldots t_\ell)^{n+i-2}| > q^{s+1+(n+i-2)/2} \quad \text{for} \quad i=1,2,\ldots,n$$

かつ

$$\begin{cases} a_m\xi_i \notin \{q^l\,;\, l\in\mathbb{Z}\} & \text{for} \quad 1\le i\le n,\ 1\le m\le 2s+2, \\ t_i\xi_j/\xi_k, t_i\xi_j\xi_k \notin \{q^l\,;\, l\in\mathbb{Z}\} & \text{for} \quad 1\le i\le \ell,\ 1\le j<k\le n \end{cases}$$

の条件を付けると $\langle 1,\xi\rangle$ は収束する [17].

2.3 正則化

BC_n 型ジャクソン積分 $\langle\varphi,\xi\rangle$ に対して次が成立する [16, 18]:

命題 2.2 $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の関数 $\Theta(z)$ を次のように定義する:

$$\Theta(z) := \prod_{i=1}^{n} \frac{z_i^s\theta(z_i^2)}{\prod_{m=1}^{2s+2} z_i^{\alpha_m}\theta(a_m z_i)} \prod_{1\le j<k\le n} \frac{z_j^{\ell-1}\theta(z_j/z_k)\theta(z_jz_k)}{\prod_{r=1}^{\ell} z_j^{2\tau_r}\theta(t_rz_j/z_k)\theta(t_rz_jz_k)}.$$

ただし $\theta(x) := (x)_\infty(q/x)_\infty$ とする. $\varphi(z)$ を $(\mathbb{C}^*)^n$ 上正則な関数で, ワイル群に作用に関して対称とすると, $(\mathbb{C}^*)^n$ 上正則な関数 $f(z)$ が存在し,

$$\langle\varphi,\xi\rangle = f(\xi)\Theta(\xi)$$

を満たす.

このことにより正則関数 $\langle\varphi,z\rangle/\Theta(z)$ を正則 BC_n ジャクソン積分と呼び, これを記号 $\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle$ で表す. $z\in(\mathbb{C}^*)^n$ の関数として $\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle$ はワイル群の作用に関して不変である. 上の命題2.2で, 正則 BC_n ジャクソン積分 $\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle$ が z によらない定数になる場合が, パラメータの個数によって分類できる [18]. これらの定数はすべて q-ガンマ関数の積で表示できる. すなわち

定理 2.3 正則 BC_n ジャクソン積分 $\langle\!\langle \varphi, z \rangle\!\rangle$ が z によらない定数になるのは (s,ℓ) が以下の場合であり, またそのときに限る.

BC_n のとき, $(s,\ell) = (1,1)$ or $(n,0)$. または, 例外的に
BC_2 のとき, $(s,\ell) = (0,2)$ or $(-1,3)$, BC_3 のとき, $(s,\ell) = (-1,2)$.

特に $\langle\!\langle 1, z \rangle\!\rangle$ の値は以下のようになる (van Diejen[10], Gustafson[12]):

BC_n で $(s,\ell) = (1,1)$ のとき,

$$\langle\!\langle 1, z \rangle\!\rangle = (1-q)^n (q)_\infty^n \prod_{i=1}^n \frac{(qt^{-i})_\infty}{(qt^{-1})_\infty} \frac{\prod_{1\le j<k\le 4}(qt^{-(n-i)}a_j^{-1}a_k^{-1})_\infty}{(qt^{-(n+i-2)}a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1})_\infty}, \tag{1}$$

BC_n で $(s,\ell) = (n,0)$ のとき,

$$\langle\!\langle 1, z \rangle\!\rangle = (1-q)^n \frac{(q)_\infty^n \prod_{1\le i<j\le 2n+2}(qa_i^{-1}a_j^{-1})_\infty}{(qa_1^{-1}a_2^{-1}\dots a_{2n+2}^{-1})_\infty}. \tag{2}$$

例外的な3種に対しても $\langle\!\langle 1, z \rangle\!\rangle$ の無限積表示は知られているが省略する (以上, [18, 20] を参照のこと).

3 古典的な q-超幾何級数との関連

q-超幾何関数 ${}_r\psi_r$ は次で定義される:

$${}_r\psi_r\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_r \end{matrix}; q, z\right] := \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1)_\nu (a_2)_\nu \cdots (a_r)_\nu}{(b_1)_\nu (b_2)_\nu \cdots (b_r)_\nu} z^\nu.$$

q-超幾何関数 ${}_r\psi_r$ のパラメータ a_i, b_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ に次の特別な条件をつけたものが古典的に研究されている [14, Chapter 5]:

$$\begin{aligned} \text{well-poised} &\iff a_1b_1 = a_2b_2 = \cdots = a_rb_r, \\ \text{very-well-poised} &\iff a_1 = -a_2 = qb_1 = -qb_2 \ \&\ \text{well-poised}, \\ \text{very-well-poised-balanced} &\iff (a_3a_4\dots a_r)qz = (\pm a_1 q^{-1/2})^{r-2} \ \&\ \text{very-well-poised}. \end{aligned}$$

3.1 Bailey の very-well-poised ${}_6\psi_6$ 和公式 (1936)

q-超幾何級数 ${}_6\psi_6$ に very-well-poised-balanced の条件を付けると, 次の無限積表示ができることが知られている:

$$\begin{aligned} &{}_6\psi_6\left[\begin{matrix} q\sqrt{a}, -q\sqrt{a}, b, c, d, e \\ \sqrt{a}, -\sqrt{a}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e \end{matrix}; q, \frac{a^2q}{bcde}\right] \\ &= \frac{(qa)_\infty (q/a)_\infty (aq/bc)_\infty (aq/bd)_\infty (aq/be)_\infty (aq/cd)_\infty (aq/ce)_\infty (aq/de)_\infty (q)_\infty}{(q/b)_\infty (q/c)_\infty (q/d)_\infty (q/e)_\infty (aq/b)_\infty (aq/c)_\infty (aq/d)_\infty (aq/e)_\infty (a^2q/bcde)_\infty}. \end{aligned}$$

この公式はパラメータの置き換え

$$\sqrt{a} \to z,\ b \to a_1z,\ c \to a_2z,\ d \to a_3z,\ e \to a_4z$$

により $s=1$ の正則 BC_1 型ジャクソン積分を使って次のように書くことができる:

$$\langle\!\langle 1,z\rangle\!\rangle=(1-q)\frac{(q)_\infty\prod_{1\le j<k\le 4}(qa_j^{-1}a_k^{-1})_\infty}{(qa_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1})_\infty}.$$

これは $n=1$ のときの公式 (1) または (2) に他ならない.

3.2 Sears–Slater の (very-)well-poised ${}_{2r}\psi_{2r}$ 変換公式

$$\begin{aligned}
&{}_{2r}\psi_{2r}\left[\begin{matrix} q\sqrt{a},-q\sqrt{a},b_3,\ldots,b_{2r} \\ \sqrt{a},-\sqrt{a},aq/b_3,\ldots,aq/b_{2r}\end{matrix};q,\frac{a^{r-1}q^{r-2}}{b_3\cdots b_{2r}}\right] \qquad (3)\\
&=\frac{(aq)_\infty(q/a)_\infty}{(a_3^2q/a)_\infty(aq/a_3^2)_\infty}\frac{(a_4)_\infty\cdots(a_r)_\infty(q/a_4)_\infty\cdots,(q/a_r)_\infty}{(a_3a_4/a)_\infty\cdots(a_3a_r/a)_\infty(aq/a_3a_4)_\infty\cdots(aq/a_3a_r)_\infty}\\
&\quad\times\frac{(a_4/a)_\infty\cdots(a_r/a)_\infty(aq/a_4)_\infty\cdots(aq/a_r)_\infty}{(a_4/a_3)_\infty\cdots(a_r/a_3)_\infty(a_3q/a_4)_\infty\cdots(a_3q/a_r)_\infty}\\
&\quad\times\frac{(a_3q/b_3)_\infty\cdots(a_3q/b_{2r})_\infty(aq/a_3b_3)_\infty\cdots(aq/a_3b_{2r})_\infty}{(q/b_3)_\infty\cdots(q/b_{2r})_\infty(aq/b_3)_\infty\cdots(aq/b_{2r})_\infty}\\
&\quad\times{}_{2r}\psi_{2r}\left[\begin{matrix} qa_3/\sqrt{a},-qa_3/\sqrt{a},a_3b_3/a,\ldots,a_3b_{2r}/a \\ a_3/\sqrt{a},-a_3/\sqrt{a},a_3q/b_3,\ldots,a_3q/b_{2r}\end{matrix};q,\frac{a^{r-1}q^{r-2}}{b_3\cdots b_{2r}}\right]\\
&\quad+\mathrm{idem}(a_3;a_4,\ldots,a_r).
\end{aligned}$$

← この記号は一つ前の式で a_3 を a_4 から a_r までのそれぞれと入れ替えたものの $r-2$ 個の和をとることを表す

などに代表される Sears や Slater による一連の変換公式が知られている. BC_1 型ジャクソン積分の立場から眺めると, それら一連の公式は見かけは異なるが, 実は次の定理の特別な場合として捉えられる.

定理 3.1 (接続公式)[22, 23] $x_i\in\mathbb{C}^*$ $(i=1,2,\ldots,s)$ は $x_i/x_j, x_ix_j\notin\{q^l\,;\,l\in\mathbb{Z}\}$ $(i\neq j)$ を満たす任意の複素数とする. $\varphi(z)$ を $\mathbb{C}^*$ 上正則な関数でワイル群の作用に関して対称とすると, s が一般の正則 BC_1 型ジャクソン積分 $\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle$ は次のように書くことができる:

$$\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle=\sum_{k=1}^{s}\langle\!\langle\varphi,x_k\rangle\!\rangle\prod_{\substack{1\le j\le s\\ j\neq k}}\frac{\theta(x_jz)\theta(x_j/z)}{\theta(x_jx_k)\theta(x_j/x_k)}. \qquad (4)$$

$\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle$ は z の値によらずパラメータ a_i に関する階数 s の線形 q-差分方程式系を満たす [4, 5]. $\langle\!\langle\varphi,z\rangle\!\rangle$ をその方程式系の基本解 $\langle\!\langle\varphi,x_i\rangle\!\rangle$ $(i=1,2,\ldots,s)$ の線形結合として書いたのが上の公式の意味である.

Sears や Slater による変換公式は定理 3.1 において z や x_i の値を特殊にとったものであることがわかる. 実際, $r=s+2$ とし, 式 (3) でパラメータの置き換え

$$\sqrt{a}\to z,\quad a_{i+2}\to x_iz\ (i=1,2,\ldots,s),\quad b_{i+2}\to a_iz\ (i=1,2,\ldots,2s+2)$$

をすると, $\varphi\equiv 1$ のときの (4) が得られる. さらに

i) $\varphi \equiv 1$ のとき $\Rightarrow$ very-well-poised Slater 変換 [14, Eq. (5.5.2)],

ii) $\varphi \equiv 1$ で $a_{2s+1} = 1, a_{2s+2} = -1$ のとき $\Rightarrow$ well-poised Slater 変換 [14, Eq. (5.5.1)],

iii) $\varphi \equiv 1$ で $x_i = a_i \, (i = 1, 2, ..., s)$ のとき $\Rightarrow$ very-well-poised Slater 変換 [14, Eq. (5.5.4)],

iv) $\varphi \equiv 1$ で $z = a_1, x_i = a_{i+1} \, (i = 1, 2, ..., s)$ のとき $\Rightarrow$ very-well-poised Sears 変換,

v) (iv) の条件と $a_{2s+1} = 1, a_{2s+2} = -1$ のとき $\Rightarrow$ well-poised Sears 変換 [14, Eq. (4.12.1)].

また最近の Schlosser の *q-IPD* と呼ばれる公式 [26] はこの接続公式 (4) で φ を特別な対称多項式にとった場合として説明できる.

4 BC_n 型ジャクソン積分と基本対称式

以下 $(s,\ell) = (1,1)$ のときに限って議論をする. $(s,\ell) = (1,1)$ の BC_n 型ジャクソン積分は, Macdonald–Koornwinder 直交多項式系の直交内積と言い換えができ [20], 様々な応用がある. $(s,\ell) = (1,1)$ の BC_n 型ジャクソン積分において, van Diejen による公式 (1) は Bailey の公式の多重級数への一つの拡張である:

$$\langle\!\langle 1, z \rangle\!\rangle = (1-q)^n (q)_\infty^n \prod_{i=1}^{n} \frac{(qt^{-i})_\infty}{(qt^{-1})_\infty} \frac{\prod_{1\le j<k\le 4}(qt^{-(n-i)}a_j^{-1}a_k^{-1})_\infty}{(qt^{-(n+i-2)}a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_4^{-1})_\infty}.$$

この右辺の無限積表示をいかに導出するかを論じたい. 今, この右辺を定数 C と呼ぶことにする. C は q-ガンマ関数の積で表示できる. 定数 C を求める方法はいろいろ知られているが, ここではパラメータに関する差分方程式を使って C を求める方法を説明する. そのために, まず例としてベータ関数のガンマ関数の積による表示

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{5}$$

を考えよう. ただし $\Phi(z) = z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}$ とし, $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \Phi(z)dz$ と書くことにする. (5) の証明には2重積分を2通りに計算して求める方法がよく知られているが, それ以外にもパラメータに関する漸化式

$$B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta), \quad B(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta) \tag{6}$$

を求めて, それを繰り返し用いること (+境界条件) で (5) を導く方法もよく知られた方法である. 式 (6) には通常以下の積分の関係式を用いる:

$$\int_0^1 z\Phi(z)dz = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_0^1 \Phi(z)dz.$$

よって, 漸化式 (6) を使う証明法のカギは部分積分を使ってこの式を導くところにある.

さて, ベータ関数においてパラメータのずらしが被積分関数に単項式を掛けることに対応していることに着目し, この考え方でジャクソン積分の定数 C を導くことを試みる. まずはその考え方の原型となる青本の方法を紹介する.

4.1 青本の方法

上のような考え方で, 青本和彦はセルバーグ積分のガンマ関数による積表示

$$\int_{0\le z_1\le\ldots\le z_n\le 1}\prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha-1}(1-z_i)^{\beta-1}\Delta_{S_n}(z)^{2\tau}dz_1\ldots dz_n$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(i\tau)\Gamma(\alpha+(n-i)\tau)\Gamma(\beta+(n-i)\tau)}{\Gamma(\tau)\Gamma(\alpha+\beta+(2n-i-1)\tau)}.$$

(ただし $\Delta_{S_n}(z):=\prod_{1\le j<k\le n}(z_k-z_j)$) に対し, 初等的な証明を与えた (1987 [2]). 現在, その証明法はその発展系も含めて青本の方法と呼ばれている [1, 25, etc]. 特に次の q-セルバーグ積分

$$S_q(\alpha,\beta,\tau;\xi) := \int_0^{\xi\infty}\Phi_{S_n}(z)\,\Delta_{S_n}(z)\varpi_q,$$
$$\Phi_{S_n}(z) := \prod_{i=1}^{n} z_i^{\alpha}\frac{(qz_i)_\infty}{(bz_i)_\infty}\prod_{1\le j<k\le n} z_k^{2\tau}\frac{(qt^{-1}z_j/z_k)_\infty}{(tz_j/z_k)_\infty}$$

(ただし $q^\alpha=a, q^\beta=b, q^\tau=t$) のときに, その方法を説明しよう. 証明したいのは, 式 (6) にあたる次の二項間漸化式である:

$$S_q(\alpha+1,\beta,\tau;\xi)=\prod_{i=1}^{n}\frac{t^{i-1}(1-at^{n-i})}{(1-abt^{2n-i-1})}\,S_q(\alpha,\beta,\tau;\xi).$$

ここで $S_q(\alpha+1,\beta,\tau;\xi)=\int_0^{\xi\infty} z_1z_2\ldots z_n\,\Phi_{S_n}(z)\Delta_{S_n}(z)\varpi_q$ に注意すると, 上式は

$$\int_0^{\xi\infty} z_1z_2\ldots z_n\,\Phi_{S_n}(z)\Delta_{S_n}(z)\varpi_q=\prod_{i=1}^{n}\frac{t^{i-1}(1-at^{n-i})}{(1-abt^{2n-i-1})}\int_0^{\xi\infty}\Phi_{S_n}(z)\Delta_{S_n}(z)\varpi_q \qquad (7)$$

と書けるが, 直接この関係式を得るのが難しい. そこで n 次基本対称式 $z_1z_2\ldots z_n$ と 0 次基本対称式 1 との間を補間するような次の命題を繰り返し使うことで, 関係式 (7) 得るのである.

命題 4.1 (Aomoto, 1994) $e_i(z)$ を i 次基本対称式とする. つまり

$$e_i(z)=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_i\le n} z_{j_1}z_{j_2}\ldots z_{j_i}\quad(0\le i\le n).$$

このとき次が成立:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\xi\infty} e_i(z)\Phi_{\mathcal{S}_n}(z)\Delta_{\mathcal{S}_n}(z)\varpi_q\\ =\ & t^{i-1}\frac{(1-t^{n-i+1})(1-at^{n-i})}{(1-t^i)(1-abt^{2n-i-1})}\int_0^{\xi\infty} e_{i-1}(z)\Phi_{\mathcal{S}_n}(z)\Delta_{\mathcal{S}_n}(z)\varpi_q.\end{aligned}$$

この考え方を BC_n 型ジャクソン積分の場合にも導入する.

4.2 BC_n 型の場合

パラメータ a_1 に関する q ずらし $a_1\to qa_1$ を T_{a_1} で表すことにする. さて BC_n 型の場合に証明したいのは漸化式 (6) にあたる次の定理である.

定理 4.2 $(s,\ell)=(1,1)$ のとき, 正則 BC_n ジャクソン積分 $\langle\!\langle 1,z\rangle\!\rangle$ はパラメータに関して次の二項間漸化式を満たす:

$$T_{a_1}\langle\!\langle 1,z\rangle\!\rangle=\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=2}^4(1-t^{n-i}a_1a_k)}{1-t^{n+i-2}a_1a_2a_3a_4}\langle\!\langle 1,z\rangle\!\rangle. \tag{8}$$

$z=\xi$ として, (8) をジャクソン積分で表示すると

$$\int_0^{\xi\infty} e'_n(z)\Phi_{B_n}(z)\Delta_{C_n}(z)\varpi_q=(-a_1)^{-n}\prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=2}^4(1-t^{n-i}a_1a_k)}{1-t^{n+i-2}a_1a_2a_3a_4}\int_0^{\xi\infty}\Phi_{B_n}(z)\Delta_{C_n}(z)\varpi_q \tag{9}$$

となる. ただし $e'(z)$ は次の (ローラン) 多項式とする:

$$e'_n(z):=\prod_{i=1}^{n}\frac{(a_1-z_i)(1-a_1z_i)}{a_1z_i}.$$

式 (9) を証明するために, 命題 4.1 にあたる次の定理を証明した.

定理 4.3 次数 i, $0\le i\le n$, の対称多項式 $e'_i(z)$ が存在し, $e'_i(z)$ と $e'_{i-1}(z)$ の間に次の関係が成立する:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\xi\infty} e'_i(z)\Phi_{B_n}(z)\Delta_{C_n}(z)\varpi_q\\ =\ & -\frac{t^{i-1}(1-t^{n-i+1})\prod_{k=2}^4(1-a_ka_1t^{n-i})}{t^{n-i}(1-t^i)a_1(1-a_1a_2a_3a_4t^{2n-i-1})}\int_0^{\xi\infty} e'_{i-1}(z)\Phi_{B_n}(z)\Delta_{C_n}(z)\varpi_q.\end{aligned}$$

命題 4.1 の類似から対称多項式 $e'_i(z)$ を <u>'基本' 対称式</u> と呼ぶことにした. その具体形は以下のように与えられる:

$$
\begin{aligned}
e'_0(z) &= 1, \\
e'_1(z) &= \chi_{(1)}(z_1, z_2, ..., z_n) - \chi_{(1)}(a_1, a_1 t, ..., a_1 t^{n-1}), \\
e'_2(z) &= \chi_{(1^2)}(z_1, z_2, ..., z_n) \\
&\quad - \chi_{(1)}(z_1, z_2, ..., z_n)\chi_{(1)}(a_1, a_1 t, ..., a_1 t^{n-2}) \\
&\quad + \chi_{(2)}(a_1, a_1 t, ..., a_1 t^{n-2}), \\
&\ \vdots \\
e'_i(z) &= \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \chi_{(1^{i-j})}(\underbrace{z_1, z_2, ..., z_n}_{n})\chi_{(j)}(\underbrace{a_1, a_1 t, ..., a_1 t^{n-i}}_{n-i+1}), \\
&\ \vdots \\
e'_n(z) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \chi_{(1^{n-j})}(z_1, z_2, ..., z_n)\chi_{(j)}(a_1) \quad \left(= \prod_{i=1}^{n} \frac{(a_1 - z_i)(1 - a_1 z_i)}{a_1 z_i} \right).
\end{aligned}
$$

ただし $\chi_\lambda(z_1, z_2, ..., z_n)$ は C_n 型既約指標で, $\chi_\lambda(a_1, a_1 t, ..., a_1 t^{n-i})$ はそれにパラメータの値を代入したもの. 各次数 i によって $\chi_\lambda(a_1, a_1 t, ..., a_1 t^{n-i})$ の変数の個数が異なることに注意. 定理 4.3 の証明は [21] 参照のこと.

注 1. '基本' 多項式 $e'_i(z)$ は $(s, \ell) = (n, 0)$ の BC_n 型ジャクソン積分に対する Gustafson の公式 (2) を証明する際にも有効である. 詳しくは [19] を参照のこと.

注 2. 最近, この '基本' 対称式は Macdonald–Koornwinder 直交多項式に対するピエリ公式に現れる基本対称式と (見かけは全く異なるが) 一致することがわかった. ピエリ公式については [9, 11] を参照のこと.

注 3. '基本' 多項式 $e'_i(z)$ は s 一般での BC_n 型ジャクソン積分のパラメータに関する q-差分方程式に対して, その基本解を構成するのに有用であることがわかっている [4, 6, 7, 8].

References

[1] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, Special functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] K. Aomoto, Jacobi polynomials associated with Selberg integrals. SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 545–549.

[3] K. Aomoto, On elliptic product formulas for Jackson integrals associated with reduced root systems. J. Algebraic Combin. **8** (1998), 115–126.

[4] K. Aomoto and M. Ito, On the structure of Jackson integrals of BC_n type and holonomic q-difference equations. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **81** (2005), 145–150.

[5] K. Aomoto and M. Ito, On the structure of Jackson integrals of type BC_n. Preprint 2005.

[6] K. Aomoto and M. Ito, BC_n type Jackson integral generalized from Gustafson's C_n type sum. Preprint 2005.

[7] K. Aomoto and M. Ito, A determinant formula for a holonomic q-difference system of BC_n type Jackson integrals . Preprint 2006.

[8] K. Aomoto and M. Ito, Asymptotic behavior of a determinant of BC_n type Jackson integrals. Preprint 2006.

[9] J. F. van Diejen, Self-dual Koornwinder-Macdonald polynomials. Invent. Math. **126** (1996), 319–339.

[10] J. F. van Diejen, On certain multiple Bailey, Rogers and Dougall type summation formulas. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **33** (1997), 483–508.

[11] J. F. van Diejen, Properties of some families of hypergeometric orthogonal polynomials in several variables. Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 233–270.

[12] R. A. Gustafson, Multilateral summation theorems for ordinary and basic hypergeometric series in $\mathrm{U}(n)$. SIAM J. Math. Anal. **18** (1987), 1576–1596.

[13] R. A. Gustafson, The Macdonald identities for affine root systems of classical type and hypergeometric series very-well-poised on semisimple Lie algebras. *Ramanujan International Symposium on Analysis (Pune, 1987)*, 185–224, Macmillan of India, New Delhi, 1989.

[14] G. Gasper and M. Rahman, Basic hypergeometric series. Second edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 96. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[15] T. H. Koornwinder, Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC. *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications (Tampa, FL, 1991)*, 189–204, Contemp. Math., 138, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[16] M. Ito, Symmetry classification for Jackson integrals associated with irreducible reduced root systems. Compositio Math. **129** (2001), 325–340.

[17] M. Ito, Convergence and asymptotic behavior of Jackson integrals associated with irreducible reduced root systems. J. Approx. Theory **124** (2003), 154–180.

[18] M. Ito, Symmetry classification for Jackson integrals associated with the root system BC_n. Compositio Math. **136** (2003), 209–216.

[19] M. Ito, Another proof of Gustafson's C_n-type summation formula via 'elementary' symmetric polynomials, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **42** (2006), 523–549.

[20] M. Ito, Askey-Wilson type integrals associated with root systems, Ramanujan J. to appear.

[21] M. Ito, q-difference shift for a BC_n type Jackson integral arising from 'elementary' symmetric polynomials, Adv. in Math., to appear.

[22] M. Ito, A simple proof of Slater's transformation formula for a very-well-poised balanced ${}_{2r}\psi_{2r}$ series, Preprint 2006.

[23] M. Ito and Y. Sanada, On Sears–Slater transformations for bilateral basic hypergeometric series, in preparation.

[24] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[25] M. L. Mehta, Random matrices. Second edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1991.

[26] M. Schlosser, Elementary derivations of identities for bilateral basic hypergeometric series. Selecta Math. (N.S.) **9** (2003), 119–159.